

Mathematics (गणित)

Time Allowed : 3 Hours

Max. Marks -100

General Instructions :

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Candidates are required to write the section code and the question number with every answer.

परीक्षार्थी प्रत्येक उत्तर के साथ खण्ड कोड एवं प्रश्न संख्या अवश्य लिखें।

The question paper consists of 29 questions divided into three sections- A,B and C. Section A comprises of 10 questions of 1 mark each. Section B comprises of 12 questions of 4 marks each and Section C comprises of 7 questions of 6 marks each.

इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन खण्डों – अ,ब और स में बाँटे हुए हैं। **खण्ड-अ** में 10 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक 1 अंक का है, **खण्ड-ब** में 12 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक 4 अंक के हैं तथा **खण्ड-स** में 7 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक 6 अंक के हैं।

Section – A (खण्ड-अ)

- 1 A binary composition * in the set of real numbers R is defined as
 $a * b = a+b-ab \quad \forall a,b \in R$ Find the value of $(2*5)*6$
 वास्तविक संख्याओं की समुच्चय R में एक द्विआधारी संक्रिया * निम्नरूप परिभाषित है –
 $a * b = a+b-ab \quad \forall a,b \in R$ तो $(2*5)*6$ का मान ज्ञात कीजिए।
- 2 Find the value of $\cos^{-1}(\cos \frac{2\pi}{3})$
 $\cos^{-1}(\cos \frac{2\pi}{3})$ (का मान ज्ञात कीजिए)
- 3 Construct a matrix of order 2×2 whose $(i,j)^{th}$ element is given by
 $a_{ij} = \frac{|3i-2j|}{3}$
 एक 2×2 आकार के वर्ग आव्यूह A का निर्माण कीजिए जिसका (i,j) वा अवयव $a_{ij} = \frac{|3i-2j|}{3}$
- 4 If (यदि) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ then find (तो ज्ञात कीजिए) $3A-2B$
- 5 Using the properties of a determinant, evaluate (एक सारणिक का गुणधर्मों का प्रयोग कर, ज्ञात कीजिए।)

$$\begin{vmatrix} a & x & a+x \\ b & y & b+y \\ c & z & c+z \end{vmatrix}$$

- 6 Find the point on the curve $y = x^2 - 4x + 5$, where the tangent is parallel to x-axis
 वक्र $y = x^2 - 4x + 5$, पर वह बिन्दु निकालिए जहाँ स्पर्श रेखा x- अक्ष के समान्तर हो।
- 7 Evaluate (ज्ञात कीजिए)

$$\int \frac{dx}{4-3x}$$
- 8 Find the unit vector along the direction of the vector $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$.
 सदिश $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ की दिशा में एक इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।
- 9 If $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ and $\vec{b} = \lambda\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ are perpendicular then find the value of λ .
 (यदि $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ और $\vec{b} = \lambda\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ एक दूसरे पर लम्ब है तो λ का मूल्य ज्ञान कीजिए)
- 10 Find the direction ratios of the normal to the plane $3x - 7y + 8z = 11$
 निम्नलिखित समतल का लम्ब की दिशा-अनुपात ज्ञात कीजिए।
 $3x - 7y + 8z = 11$

Section – B (खण्ड-ब)

- 11 If (यदि) $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ then find the value of x (तो x का मान ज्ञात कीजिए)
- 12 If (यदि) $f: R \rightarrow R$ is defined as (निम्नरूप परिभाषित हो)
 $f(x) = (3-x^3)^{1/3}$ then prove that (तो सिद्ध करें) $f(f(x)) = x$
- 13 Using the properties of a determinant, prove that (एक सारणिक का गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए)

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy + yz + zx)$$
- 14 For what value of k is the following function continuous at $x = 2$? (k का कौन सा मान के लिए निम्नलिखित फलन $x = 2$ पर संतत है?)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x < 2 \\ k & ; x = 2 \\ 3x-1 & ; x > 2 \end{cases}$$
- 15 If (यदि) $y = x^x + (\sin x)^{\tan x}$ then find (तो ज्ञात कीजिए) $\frac{dy}{dx}$.

OR (अथवा)

- If (यदि) $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$ then prove that (तो सिद्ध कीजिए)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}, \quad y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$$

- 16 Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2 - 5x + 6$ in the interval $[2,3]$ रॉली के प्रमेय की जाँच फलन $f(x) = x^2 - 5x + 6$ को अंतराल $[2,3]$ के लिए कीजिए।

OR (अथवा)

Prove that the function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 18$ is an increasing function on \mathbb{R} .

दिखाए कि फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 18$ \mathbb{R} में क्रम वर्धित है।

- 17 Evaluate (मान ज्ञात कीजिए)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

- 18 Evaluate (मान ज्ञात कीजिए)

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

OR (अथवा)

Evaluate (मान ज्ञात कीजिए)

$$\int_{-1}^2 |x^3 - x^2| dx$$

- 19 Evaluate $\int_1^2 x^2 dx$ as a limit of a sum.

$\int_1^2 x^2 dx$ का मान जोड़ का सीमा से प्राप्त कीजिए।

- 20 If (यदि) $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ and और $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$ then find the following (तो $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$ निम्नलिखितों का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\vec{a} - 3\vec{b}$ (ii) $|\vec{a} - 3\vec{b}|$ (iii) $\vec{b} \times 2\vec{a}$ (iv) $\vec{b} \cdot 2\vec{a}$

OR (अथवा)

Find the projection of $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ on the vector $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, (सदिश $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ का प्रक्षेप सदिश $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ पर ज्ञात कीजिए)

- 21 Find the equation of the plane passing through the line of intersection of the planes $3x - 2y + z = 5$ and $x - y + 2z = 3$ and containing the point $(1, 2, 3)$. समतल $3x - 2y + z = 5$ और $x - y + 2z = 3$ के प्रतिच्छेद सरलरेखा तथा बिन्दु $(1, 2, 3)$ से गुजरती हुई समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

- 22 A and B be events such that $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ then find (A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ और

$P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए) —

- (i) $P(A \cup B)$
(ii) $P(A/B)$
(iii) $P(B/A)$
(iv) $P(B'/A)$

Section – C (खण्ड-स)

- 23 Solve by matrix method, the equations (आव्यूहों विधि से निम्नलिखित समीकरणों का हल कीजिए) –
- $$\begin{aligned}x - y + z &= 4 \\2x + y - 3z &= 0 \\x + y + z &= 2\end{aligned}$$

- 24 Find the maximum and minimum value of the function (निम्नलिखित फलन का सर्वोच्च तथा सर्वनिम्न मान ज्ञात कीजिए)
- $$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25.$$

- 25 Find the area of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ by integration.}$$

वलये $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल समाकलन द्वारा ज्ञात कीजिए।

OR (अथवा)

Find the area of the region

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 2\}$$

$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 2\}$ द्वारा प्रदत्त क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- 26 (i) Find the direction ratios of the straight line joining A (5,-3,8) and B (2,-1,4).
बिन्दु A (5,-3,8) और B (2,-1,4) को मिलानेवाली सरल रेखा का दिशा अनुपात ज्ञात कीजिए।
- (ii) Find the angle between the straight lines whose direction ratios are 1,2,-1 and 1,2,-2.
दो सरल रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनका दिशा अनुपात 1,2,-1 और 1,2,-2 है।
- (iii) Write the equation of the xy plane.
xy समतल का समीकरण को लिखिए।
- (iv) Find the distance of the point (1,-2,1) from the plane $3x - y + z = 4$.
बिन्दु (1,-2,1) का दूरी समतल $3x - y + z = 4$ से ज्ञात कीजिए।
- (v) Find the angle between the planes. $X + y + 2z = 6$ and $2x - y + z = 9$
समतल $X + y + 2z = 6$ और $2x - y + z = 9$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।
- (vi) If the straight lines (यदि सरल रेखाएँ)
 $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ and (और)
 $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ are perpendicular to each other (एक दूसरे पर लम्ब हो
तौ) then find the value of K. (K का मान ज्ञात कीजिए)

27 Solve the differential equation (अवतल समीकरण का हल करें)

$$\frac{dy}{dx} + y \sec^2 x = \tan x \sec^2 x \text{ where (जहाँ) } y(0) = 1$$

OR (अथवा)

Solve (हल करें)

$$2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0 \text{ given that (प्रदत्त है कि) } y(1) = 2$$

28 Solve the LPP graphically (निम्नलिखित LPP को ग्राफीय विधि से हल करें।)

$$\text{Maximise } Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{Subject to } x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$\text{and } x_1, x_2 \geq 0$$

29 Two Cards are drawn simultaneously from a well-Shuffled pack of 52 Cards. Find the mean and variance of the number of aces. (52 पत्तियों का पैकेट से दो पत्ते एक साथ खींचा गया। इक्का की संख्या का माध्य तथा प्रसरण निकालें।)

OR (अथवा)

(i) If (यदि) $y = x^{\sin x}$ then find (तो ज्ञात कीजिए) $\frac{dy}{dx}$

(ii) If (यदि) $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$ then find (तो ज्ञात कीजिए) $\frac{dy}{dx}$

(iii) If (यदि) $x = at^2$ and (और) $y = 2at$ then find (तो ज्ञात कीजिए) $\frac{d^2x}{dy^2}$

(iv) If (यदि) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y$ then find y (तो y का मान ज्ञात कीजिए)

(v) If (यदि) $\frac{dy}{dx} y \cot x = 2 \cos x$ then find y (तो y का मान ज्ञात कीजिए)

(vi) Prove that the general solution of the differential equation (सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित अवतल समीकरण का साधारण हल)

$$\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$$

is given by $be^{ax} + a^{-by} + c = 0$ (है)