

Mathematics (गणित)

Time Allowed : 3 Hours

Max. Marks -100

General Instructions :

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Candidates are required to write the section code and the question number with every answer.

परीक्षार्थी प्रत्येक उत्तर के साथ खण्ड कोड एवं प्रश्न संख्या अवश्य लिखें।

The question paper consists of 29 questions divided into three sections- A,B and C.

Section A comprises of 10 questions of 1 mark each. Section B comprises of 12 questions of 4 marks each and Section C comprises of 7 questions of 6 marks each.

इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन खण्डों – अ,ब और स में बाँटे हुए हैं। खण्ड-अ में 10 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक 1 अंक का है, खण्ड-ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक 4 अंक के हैं तथा खण्ड-स में 7 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक 6 अंक के हैं।

Section – A (खण्ड-अ)

- 1 A binary composition \circ in the set of real numbers R is defined as
 $a \circ b = a+b-1 \forall a, b \in R$ Find 40(509)
वास्तविक संख्याओं की समुच्चय R में एक द्विआधारी संक्रिया \circ निम्नरूप परिभाषित है –
 $a \circ b = a+b-1 \forall a, b \in R$ तो 40(509) का मान ज्ञात कीजिए।
- 2 Find the principal value of (मुख्य मान ज्ञात कीजिए)
 $\sec^{-1} \frac{2}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}(-\sqrt{3})$
- 3 Construct a square matrix A of order 2×2 whose $(i,j)^{\text{th}}$ element is $(i+j)/3$.
एक 2×2 आकार के वर्ग आव्यूह A का निर्माण करें जिसका (i,j) वा अवयव $(i+j)/3$ है।
- 4 If the coordinates of P and Q are $(2,3,0)$ and $(-1,-2,-4)$ respectively, find the vector \overrightarrow{PQ}
यदि बिन्दु P और Q का स्थानांक क्रमशः $(2,3,0)$ और $(-1,-2,-4)$ हैं तो सादेश \overrightarrow{PQ} को ज्ञात कीजिए।
- 5 Evaluate (मान निकालें)
 $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + \vec{j} \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + \vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$
- 6 If (यदि) $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ find (निकालें)
 $|2A|$

- 7 Evaluate (मान निकालें) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
- 8 If (यदि) and (और)
If $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7$ and
f(*x*) is continuous (संलग्न हो) then find the value of (तो मान निकालें) *f*(3)
- 9 Find the order of the differential equation (निम्नलिखित अवतल समीकरण का क्रम ज्ञात कीजिए।

$$2x^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 - 3x \frac{dy}{dx} + y = 0$$
- 10 Find the distance of the plane $2x - y + 3z = 4$ from the point (1,0,-2) विन्दु (1,0,-2) से समतल $2x - y + 3z = 4$ का दूरी ज्ञात कीजिए।

Section – B (खण्ड-ब)

- 11 Solve for *x* (*x* के लिए हल करें) –

$$\begin{vmatrix} x-3 & x & x \\ x & x-3 & x \\ x & x & x-3 \end{vmatrix} = 0$$
- 12 Prove that (साबित करें)

$$\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1} \frac{1}{3} = \frac{9}{4} \sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
- 13 Let (माना कि)
 $f : R - \{2/3\} \rightarrow R$
 defined by (परिभाषित है) $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$
 show that (दिखाएँ कि) $f \circ f(x) = x$
- 14 Check the continuity of the function (निम्नलिखित फलन का सतता जाँच कीजिए)
 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}; x \neq 0$
 $= 0; x = 0$
 at $x=0$ ($x=0$ पर)
- 15 If (यदि) $x = a \cos t$ and (और) $y = b \sin t$ then find (तो ज्ञात कीजिए)
 $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}$ and (और) $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 16 The radius of a circle is increases uniformly at the rate of 3 cm./sec. Find the rate of increase in area of the circle when its radius is 10cm.
 एक वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी/से० के समरूप दर से बढ़ती जा रही है। वृत्त की क्षेत्रफल वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए जब वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी है।

Or (अथवा)

Find the equation of the tangent to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ at the point (1,1),
वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु (1,1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

17 Evaluate (मान निकालें)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

Or (अथवा)

Evaluate (मान निकालें)

$$\int_0^4 |x-1| dx$$

18 Solve the differential equation

(दिए हुए अवतल समीकरण का हल निकालें।

$$(x^2 + xy)dy = (x^2 + y^2)dx$$

Or (अथवा)

Solve the differential equation

(दिए हुए अवतल समीकरण का हल निकालें।

$$\frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$$

19 Evaluate (मान निकालें)

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$$

20 Let (माना) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ and (और) $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ Then find (तो ज्ञात कीजिए) –

(i) $\vec{a} + \vec{b}$

(ii) $\vec{a} - \vec{b}$

(iii) $|\vec{a} + \vec{b}|$ and (और) $|\vec{a} - \vec{b}|$

(iv) the angle between $\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} - \vec{b}$
($\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - \vec{b}$ के बीच की कोण)

21 Find the equation of the plane, which contains the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - 4 = 0$ and $\vec{r} \cdot (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + 5 = 0$ and which is perpendicular to the plane.

$$\vec{r} \cdot (5\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}) + 8 = 0$$

समतल $\vec{r} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - 4 = 0$ और $\vec{r} \cdot (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + 5 = 0$ के प्रतिच्छेद सरलरेखा से गुजरती हुई एक समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $\vec{r} \cdot (5\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}) + 8 = 0$ के साथ लम्बदत्त हो।

22 A and B are two independent events, where $P(A) = 0.3$ and $P(B) = 0.6$. Then find

(A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, यदि $P(A) = 0.3$ और $P(B) = 0.6$. तो ज्ञात कीजिए) –

- (i) $P(A \cap B)$
- (ii) $P(A \cup B)$
- (iii) $P(A \cap B')$
- (iv) $P(A' \cap B')$

Section – C (खण्ड-स)

23 Solve the following equations by matrix method (निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि से हल करें) –

$$\begin{aligned}x - y + 2z &= 7 \\3x + 4y - 5z &= -5 \\2x - y + 3z &= 12\end{aligned}$$

24 Find all the points of local maxima and minima and the corresponding maximum and minimum values of the function.

निम्नलिखित फलन का सभी स्थानीय न्यून बिन्दुएँ और सर्वोच्च बिन्दुएँ तथा संगत न्यूनतम और अधिकतम मानों को ज्ञात कीजिए।

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - 8x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 105.$$

Or (अथवा)

Find the intervals on which the function $f(x) = 5 + 36x + 3x^2 - 2x^3$ is (a) increasing (b) decreasing.

फलन $f(x) = 5 + 36x + 3x^2 - 2x^3$ के लिए वो अंतरालों को ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x)$ (a) क्रम वर्धित (b) क्रम घटित हो।

25 Evaluate (मान निकालें)

$$\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Or (अथवा)

Evaluate (मान निकालें)

$$\int \frac{3x+1}{2x^2-2x+3} dx$$

- 26 (i) Shade the region (क्षेत्र को छायांकित करें)

$$R^1 = \{x, y\} : x^2 + y^2 \leq 1; x, y \geq 0\}$$

- (ii) Shade the region (क्षेत्र को छायांकित करें)

$$R_1 = \{x, y\} : x + y \geq 1\}$$

- (iii) Shade the region (क्षेत्र को छायांकित करें)

$$R = \{x, y\} : x^2 + y^2 \leq 1 \leq x + y\}$$

- (iv) Find the area of R1 (R1 का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।)

- (v) If $R^1_2 = \{(x, y) : x + y \leq 1; x, y \geq 0\}$ then find the area of R^1_2

(तो R^1_2 का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए)

- (vi) Find the area of R (R का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए)

- 27 In a bolt factory, three machines A, B and C manufacture 25%, 35% and 40% of the total production respectively. Of their respective outputs 5%, 4% and 2% are defective.

एक बोल्ट के कारखाना में तीन मशीन A, B, C सम्पूर्ण उत्पाद का क्रमशः 25%, 35% और 40% उत्पादन करता है। इस उत्पादन में क्रमशः 5%, 4% और 2% त्रुटिपूर्ण है।

- (i) A bolt is drawn at random. Find the probability that it is produced by machine A.

एक बोल्ट यदृच्छया चुना गया, यह बोल्ट मशीन A के द्वारा उत्पादित होने का प्राथमिकता ज्ञात कीजिए।

- (ii) A bolt is drawn at random. Find the probability that it is produced by machine C.

एक बोल्ट यदृच्छया चुना गया, यह बोल्ट मशीन C के द्वारा उत्पादित होने का प्राथमिकता ज्ञात कीजिए।

- (iii) Find the probability of drawing a defective bolt, given that it is produced by machine A.

एक त्रुटिपूर्ण बोल्ट चुनने की प्राथमिकता ज्ञात कीजिए जब यह मालुम हो कि यह बोल्ट मशीन A से उत्पादित है।

- (iv) Find the probability of drawing a defective bolt, given that it is produced by machine B.

एक त्रुटिपूर्ण बोल्ट चुनने की प्राथमिकता ज्ञात कीजिए जब यह मालुम हो कि यह बोल्ट मशीन B से उत्पादित है।

- (v) Find the probability of drawing a defective bolt, given that it is produced by machine C.

एक त्रुटिपूर्ण बोल्ट चुनने की प्राथमिकता ज्ञात कीजिए जब यह मालुम हो कि यह बोल्ट मशीन C से उत्पादित है।

(vi) A bolt is drawn at random and it is found to be defective. Find the probability that it was manufactured by machine A.

एक बोल्ट यदृच्छया चुना गया और इसे त्रुटिपूर्ण पाया गया। यह बोल्ट मशीन A से उत्पादित होने का प्राथमिकता ज्ञात कीजिए।

28

Prove that $y = e^{-5x}$ is a solution of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 5y = 0$$

(सिद्ध करें कि अवतल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 5y = 0$ का हल $y = e^{-5x}$ है।)

Or (अथवा)

Solve the differential equation (निम्नलिखित अवतल समीकरण को हल करें।)

$$(x \log x) \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$$

29

Solve the LPP graphically (निम्नलिखित LPP को ग्राफीय विधि से हल करें।)

$$\text{Maximise } Z = 4x + y$$

$$x + y \leq 50$$

$$\text{Subject to } 3x + y \leq 90$$

$$x, y \geq 0$$

THE END