

## Mathematics (गणित)

Time Allowed : 3 Hours

Max. Marks -100

### General Instructions :

- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- इस प्रश्नपत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं, अ, ब तथा स। खण्ड 'अ' में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है। खण्ड 'ब' में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंकों का है। खण्ड 'स' में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंकों का है।
- खण्ड 'अ' में सभी प्रश्नों का उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता के अनुसार दिये जा सकते हैं।
- पूर्ण प्रश्नपत्र में विकल्प नहीं है। फिर भी चार अंकों वाले 5 प्रश्नों में एवं छः अंकों वाले 4 प्रश्नों में अंतरिम विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में आपको एक ही विकल्प हल करना है।
- कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

### General Instruction

- All question are compulsory.
- The question paper consists of 29 questions divided into three sections A, B and C. Section A is comprised of 10 questions of one mark each, section B is comprised of 12 questions of Four marks each and section C is comprised of Six marks each.
- All questions in section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.
- There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 5 questions of section B and 4 questions of section C. you have to attempt only one alternates in all such questions.
- Use of calculator is not permitted.

### खण्ड – अ Section – A

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Question number 1 to 10 carry 1 mark each.

- समुच्चय  $S = \{1, 2, 3\}$  पर परिभाषित फलन  $f : S \rightarrow S$  के लिए, जो निम्नरूप में दिखाया गया है

$$f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\} \text{ व्युत्क्रम फलन } f^{-1} \text{ लिखें।}$$

Write the  $f^{-1}$  for the function  $f : S \rightarrow S$  defined over a set  $S = \{1, 2, 3\}$  shown

$$\text{as } f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$$

- मान ज्ञात करें  $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

Find the value of  $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

- $2 \times 2$  क्रमवाले आव्यूह  $A$  के लिये  $\lambda$  का मान ज्ञात करें, जहाँ  $|A| = 5$  एवं  $|\lambda A| = 20$  है।

Write the value of  $\lambda$  for a matrix  $A$  of order  $2 \times 2$  where  $|A| = 5$  and  $|\lambda A| = 20$ .

- यदि  $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ , तो  $x + y$  का मान बतायें।

If  $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  then find  $x + y$ .

- (5) सारणिक  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$  का मान लिखें।

Write the value of the determinant  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ .

- (6) मान ज्ञात करें  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

Evaluate  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ .

- (7) अवकल समीकरण  $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$  का कोटि है

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) अपरिभाषित

The degree of the differential equation  $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$  is

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) Not defined

- (8)  $\vec{a}$  और  $-\vec{a}$  के बीच बन रहे कोण का मान लिखें।

Write the angle between  $\vec{a}$  and  $-\vec{a}$ .

- (9)  $\vec{a}$  और  $(\vec{a} \times \vec{b})$  के बीच अदिश गुणक के मान लिखें।

Write the scalar product of  $\vec{a}$  and  $(\vec{a} \times \vec{b})$ .

- (10) दिये गये सरल रेखा  $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+8}{6}$  के लिये दिक् कोज्या का मान लिखें।

Write the direction cosine of the state line  $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+8}{6}$ .

खण्ड - 'ब'

Section - B

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Question number 11 to 22 carry 4 marks each.

- (11) प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय  $N$  पर परिभाषित द्विआधारी संक्रिय\* के लिए, जहाँ  $a*b = a$  एवं  $b$  के लघुत्तम समापवर्त्य हैं ज्ञात करें -

(i)  $20*16$

(ii) क्या\*क्रम विनिमेय गुण को धारण करता है ?

(iii) क्या\*साहचर्य नियम का पालन करता है ?

(iv) \* के लिये सत्समक अवयव

For the binary operation \* defined on the set of natural number  $N$ . Where  $a*b = LCM$  of  $a$  and  $b$ , find

(i)  $20*16$

(ii) Is \* commutative

(iii) Is \* associative

(iv) Identify element for \*

(12) सिद्ध करें कि  $\sin^{-1} \frac{5}{13} + \cos^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{63}{16}$

Prove that  $\sin^{-1} \frac{5}{13} + \cos^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{63}{16}$ .

(13) दिये गये वर्ग आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  को सयमित एवं विषय सयमित आव्यूहों के योग के रूप में प्रदर्शित करें।

Express the square matrix  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  as sum of symmetric and skened symmetric matrices.

OR

यदि  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ , तो दर्शाइये कि  $A^2 - 5A + 7I = 0$ ,

If  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ , then show that  $A^2 - 5A + 7I = 0$ .

(14) दिये गये फलन  $f$  के सत्यता की जाँच करें, जहाँ  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{if } x < 0 \\ x+1, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$

Investigate the continuity of function  $f$  where  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{if } x < 0 \\ x+1, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$ .

(15)  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात करें जब  $x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$  एवं  $y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$  हो

Find  $\frac{dy}{dx}$ , if  $x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$  and  $y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$ .

OR

यदि  $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$  हों, तो दर्शाइये कि  $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$

If  $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$ , then show that  $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$ .

(16) दिये गये पखलय  $y = (x-2)^2$  के लिये ज्ञात करें

(i)  $\frac{dy}{dx}$

(ii) पखलय पर स्थित दो बिन्दुओं  $(2,0), (4,4)$  को जोड़ने वाले जीवा का ढाल (slope)

(iii) का मान, जब स्पर्श रेखा का ढाल = उपर्युक्त जीवा का ढाल

(iv)  $x$  प्राप्त बिन्दु के निर्देशांक पर स्पर्श रेखा का समीकरण

For given Parabola  $y = (x-2)^2$ , find

(i)  $\frac{dy}{dx}$

(ii) slope of the chord joining two points  $(2,0)$  and  $(4,4)$ .

(iii) value of  $x$ , when slope of the tangent = slope of the chord

(iv) equation of the tangent at the obtained point.

(17) मान ज्ञात कीजिये  $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

Evaluate  $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

OR

मान ज्ञात कीजिये  $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}} dx$

Evaluate  $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}} dx$

(18) मान ज्ञात कीजिये  $\int e^x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

Evaluate  $\int e^x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

(19) मान ज्ञात कीजिये  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$

Evaluate  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$

(20) दिखाइये कि बिन्दु  $A(1,2,7)$ ,  $B(2,6,3)$  एवं  $C(3,10,-1)$  संरेखी हैं।

Show that the points  $A(1,2,7)$ ,  $B(2,6,3)$  and  $C(3,10,-1)$  are collinear.

OR

शीर्षबिन्दु  $A(1,1,2)$ ,  $B(2,3,5)$  एवं  $C(1,5,5)$  से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Find the area of the triangle with vertices  $A(1,1,2)$ ,  $B(2,3,5)$  and  $C(1,5,5)$ .

(21) दो रेखाओं  $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$  एवं  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$  के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।

Find the shortest distance between two lines  $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$  and  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ .

(22) यदि If  $P(A) = \frac{6}{11}$ ,  $P(B) = \frac{5}{11}$  एवं  $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$  हों तो ज्ञात करें Find

(i)  $P(A \cap B)$  (ii)  $P(A|B)$  (iii)  $P(B|A)$  (iv)  $P(A-B)$

OR

यदि  $A$  एवं  $B$  दो स्वतंत्र घटनायें हों जहाँ  $P(A) = 0.3$  एवं  $P(B) = 0.4$  हों तो ज्ञात करें

(i)  $P(A \cap B)$  (ii)  $P(A \cup B)$  (iii)  $P(A|B)$  (iv)  $P(B|A)$

If  $A$  and  $B$  are two independent events, where  $P(A) = 0.3$  and  $P(B) = 0.4$ , then find

(i)  $P(A \cap B)$  (ii)  $P(A \cup B)$  (iii)  $P(A|B)$  (iv)  $P(B|A)$

खण्ड – 'स'

Section – C

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंकों का है।

Question number 23 to 29 carry 6 marks each.

(23) आब्यूहों का प्रयोग करके, निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिये ;

$$3x - 2y + 3z = 8, 2x + y - z = 1, 4x - 3y + 2z = 4.$$

Using matrices solve the following system of equations ;

$$3x - 2y + 3z = 8, 2x + y - z = 1, 4x - 3y + 2z = 4.$$

(24) दर्शाइये कि दिये गये वृत्त में अन्तर्निहित आयतों में अधिकतम क्षेत्रफल का आयत एक वर्ग है।

Show that of all the rectangles inscribed in a given fixed circle, the square has the maximum area.

OR

(i) अन्तराल ज्ञात करें, जिसमें फलन  $f(x) = x^2 + 2x - 5$  वर्धमान क्रम में है।

(ii) मान ज्ञात करें (अवकलन का उपयोग करते हुए)  $\sqrt{25.3}$

(i) Find the interval, where function  $f(x) = x^2 + 2x - 5$  is in increasing order.

(ii) Using differentiation, find the value (approx)  $\sqrt{25.3}$ .

- (25) पखलय  $x^2 = y$ , सरल रेखा  $y = x + 2$  एवं  $x$ - अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात करें।

Find the area of the region enclosed by the parabola  $x^2 = y$ , st line  $y = x + 2$  and  $x$ - axis.

OR

योग की सीमा विधि अर्थात प्रारंभिक विधि से मान ज्ञात करें  $-\int_1^3 x dx$

Using limit of sum ie. Ab-initia method evaluate  $-\int_1^3 x dx$

- (26) यदि  $x \frac{dy}{dx} + y = x^3$ , तो ज्ञात करें

(i) अवकलन समीकरण की कोटि

(ii) स्थापित रूप में लाकर P एवं Q के मान

(iii) समाकलन गुणांक अर्थात  $e^{\int P dx}$

(iv) व्यापक हल

(v) प्राचल स्थिरांक के मान यदि  $x=1$  एवं  $y=2$  हो,

(vi) विशिष्ट हल उपर्युक्त प्राचल स्थिरांक के संदर्भ में,

If  $x \frac{dy}{dx} + y = x^3$ , then evaluate –

(i) Order of the differential equation.

(ii) P and Q after bringing it into standard form.

(iii) Integrating factor ie.  $e^{\int P dx}$ .

(iv) General solution.

(v) Value of arbitrary constant if  $x=1$  and  $y=2$ .

(vi) Particular solution.

- (27) अनियोजित चर  $x$  के लिये प्रायिकता बंटन  $P(x)$  निम्न हैं

$$P(x) = \begin{cases} K, & \text{if } x=0 \\ 2K, & \text{if } x=1 \\ 3K, & \text{if } x=2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(i) K का मान ज्ञात करें

(i) Determine the value of K

(ii) ज्ञात करें  $P(x < 2)$

(ii) Find  $P(x < 2)$

(iii)  $P(x \leq 2)$

(iii)  $P(x \leq 2)$

(iv)  $P(x \geq 2)$

(iv)  $P(x \geq 2)$

(v) प्रायिकता बंटन सारणी

(v) Probability Distribution Table

(vi) माध्य

(vi) Mean.

- (28)  $(3, -4, -5)$  एवं  $(2, -3, 1)$  को जोड़ने वाली सरल रेखा के द्वारा समतल  $2x + y + z = 7$  को बेधने वाले बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात करें।

Find the co-ordinates of the point where the line through  $(3, -4, -5)$  and  $(2, -3, 1)$  crosses the plane  $2x + y + z = 7$ .

OR

समतल के समीकरण को ज्ञात करें जो  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 2, 1)$  एवं  $(-2, 2, -1)$  से गुजरते हों।

Find the equation of the plane passing through these points  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 2, 1)$  and  $(-2, 2, -1)$ .

- (29) एक उत्पादक संयंत्र दो उत्पाद A एवं B का उत्पादन करता है। उत्पाद A में निर्माण स्तर पर 9 घंटे एवं सुसज्जाकरण में 1 घंटा तथा उत्पाद B में निर्माण स्तर पर 12 घंटा एवं सुसज्जाकरण में 3 घंटे लगते हैं। निर्माण के लिये अधिकतम 180 मानव घंटे एवं सुसज्जाकरण के लिये अधिकतम 30 घंटे उपलब्ध हैं। प्रत्येक उत्पाद A पर उत्पादक को ₹ 8000 एवं उत्पाद B पर ₹ 12000 मिलते हैं। उत्पाद A एवं B कितनी संख्या में प्रति सप्ताह बनायी जायें जिससे संयंत्र को अधिकतम लाभ हो सके। अधिक लाभ की प्रति सप्ताह राशि ज्ञात करें।

A manufacturing company makes two models A and B of product. Each piece of model A requires 9 labour hours for fabricating and 1 labour hour for finishing. Each piece of model B requires 12 labour hours for fabricating and 3 labour hours for finishing. For fabricating and finishing the maximum labour hours are available 180 and 30 respectively. The company makes a profit of ₹ 8000 on each piece of model A and ₹ 12000 on each piece of model B. How many pieces of model A and B should be manufactured per week to realise a maximum profit? What is the maximum profit per week?

OR

एक आहार विज्ञानी दो प्रकार के भोज्य पदार्थों X एवं Y को इस प्रकार मिलाकर एक मिश्रण बनाना चाहता है जिसमें कम से कम 10 ईकाई विटामिन A, 12 ईकाई विटामिन B एवं 8 ईकाई विटामिन C हो। एक किलो भोज्य पदार्थ में विटामिन की मात्रा इस प्रकार है –

भोजन	विटामिन	A	B	C
X		1	2	3
Y		2	2	1

X की कीमत ₹ 16/किग्रा एवं Y की कीमत ₹ 20/किग्रा है। मिश्रण भोजन की न्यूनतम कीमत का निर्धारण करें जिसमें वांछित विटामिन की मात्रा पूरा हो सके।

A dietician wishes to mix together two kind of foods X and Y in such a way that the mixture contains at least 10 units of vitamine A, 12 unites of vitamin B and 8 units of vitamin C. The vitamin contents of one kg food is given below :-

Food	Vitamin	A	B	C
X		1	2	3
Y		2	2	1

One kg of food X costs ₹ 16 and one kg of food Y costs ₹ 20. Find the least cost of the mixture which will produce the required diet.