

Mathematics (गणित)

Time Allowed : 3 Hours

Max. Marks -100

General Instructions :

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Candidates are required to write the section code and the question number with every answer.

परीक्षार्थी प्रत्येक उत्तर के साथ खण्ड कोड एवं प्रश्न संख्या अवश्य लिखें।

The question paper consists of 29 questions divided into three sections- A,B and C.

Section A comprises of 10 questions of 1 mark each. Section B comprises of 12 questions of 4 marks each and Section C comprises of 7 questions of 6 marks each.

इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन खण्डों – अ,ब और स में बाँटे हुए हैं। **खण्ड-अ** में 10 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक 1 अंक का है, **खण्ड-ब** में 12 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक 4 अंक के हैं तथा **खण्ड-स** में 7 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक 6 अंक के हैं।

Section – A (खण्ड-अ)

- 1 Let * be the binary operation on N given by $a*b = \text{L.C.M. of } a \text{ and } b$. Find the value of $(5*7)$.
मान लीजिए कि N में एक द्विआधारी संक्रिया *, $a * b = a$ तथा b का L.C.M द्वारा परिभाषित है तो $(5*7)$ का मान ज्ञात कीजिए।
- 2 Find the principal value of (निम्नलिखित का मुख्य मान ज्ञात कीजिए)
 $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$
- 3 Construct a (2×2) matrix whose element are given by $a_{ij} = \frac{1}{2}|i-j|$
एक ऐसे 2×2 आव्यूह की रचना कीजिए, जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{2}|i-j|$ द्वारा प्रदत्त हैं।
- 4 Find values of X, If $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & x \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$
X का मान ज्ञात कीजिए, यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & x \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$
- 5 Find the slope of the tangent to the curve $y = 3x^4 - 4x$ at $x = 4$
वक्र $y = 3x^4 - 4x$ के $x = 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
- 6 If $y = ex^3$, find $\frac{dy}{dx}$
यदि $y = ex^3$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए
- 7 Find the value of (मान ज्ञात कीजिए) $\int e^x (\cos x - \sin x) dx$.
- 8 Find the unit vector in the direction of the vector $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$.
सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए ?

9

Find the projection of the vector $(\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k})$ on the vector $(7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k})$

सदिश $(\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k})$ का सदिश $(7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k})$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए ?

10

Show that the points (2,3,4), (-1, -2, 1) and (5, 8, 7) are collinear.

दर्शाइए कि बिंदु (2,3,4), (-1, -2, 1) और (5, 8, 7) संरेखी है।

Section – B (खण्ड-ब)

11

Let $A = \mathbb{R} - \{3\}$ and $B = \mathbb{R} - \{1\}$ consider the function $f : A \rightarrow B$ defined by

$f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$. is f one-one and on to? Justify your answer.

मान लीजिए कि $A = \mathbb{R} - \{3\}$ तथा $B = \mathbb{R} - \{1\}$ है। $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $f : A \rightarrow B$ पर विचार कीजिए। क्या f एकैकी तथा आच्छादक है ? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

12

Prove that (साबित करें)

$$2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$$

13

Using properties of determiners prove that

सारणिकों के गुणाधर्म का प्रयोग करके सिद्ध करें कि

$$\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+2 & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$

14

Find all points of discontinuity of f . where f is defined by. फलन f के सभी असांत्य के बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जबकि f परिभाषित है।

$$f(x) = \begin{cases} |x|+3 & , \text{ if } x \leq -3 \\ -2x & , \text{ if } -3 < x < 3 \\ 6x+2 & , \text{ if } x \geq 3 \end{cases}$$

15

If $x = \sqrt{a \sin^{-1}t}$, $y = \sqrt{a \cos^{-1}t}$ then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$.

यदि $x = \sqrt{a \sin^{-1}t}$, $y = \sqrt{a \cos^{-1}t}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$.

Or (अथवा)

Differentiate the function with respect to x .

$$x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$$

प्रदत्त फलन का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

16

Find the intervals in which the function is strictly increasing or strictly Decreasing. $f(x) = (x+1)^3 (x-3)^3$

अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = (x+1)^3 (x-3)^3$ निरंतर वर्धमान या ह्रासमान है।

Or (अथवा)

A ladder 5m long is leaning against a wall. The bottom of the ladder is pulled along the ground, away from the wall at the rate of 2cm/S. How fast is its height on the wall decreasing when the foot of the ladder is 4m away from the wall?

एक 5m लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी के नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश दीवार से 2cm/S की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4m दूर है।

17 Find (का मान ज्ञात कीजिए)

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$$

18 Find (का मान ज्ञात कीजिए)

$$\int \frac{5x-2}{1+2x+3x^2} dx$$

19 Find (का मान ज्ञात कीजिए)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx.$$

20

Show that the vectors $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ and $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ form the vertices of a right angled triangle.

दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ और $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों की रचना करते हैं।

21

Find value of P so that the lines $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ and

$\frac{7-7x}{3P} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ are at right angles.

P का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ और

$\frac{7-7x}{3P} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लंब हों।

22

Given that the two numbers appearing on throwing two dice are different.

Find the probability of the event the sum of numbers on the dice is 4.

यह दिया गया है कि दो पासों को उछालने पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Section – C (खण्ड-स)

23

Obtain the inverse of the following matrix using elementary Transformation (प्रारंभिक संक्रियाओं) के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्येह का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Or (अथवा)

Solve the system of linear emanation. Using matrix method. (समीकरण निकाय को आव्यूहन विधि से हल करें)

$$2x+3y+3z=5, \quad x-2y+z=-4, \quad 3x-y-2z=3.$$

- 24 Find the maximum value of $2x^3 - 24x + 107$ in the interval $[1, 3]$.
अंतराल $[1, 3]$ में $2x^3 - 24x + 107$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए।
- 25 Find area of the region bounded by the two parabolas $y = x^2$ and $y^2 = x$ (दो पखलयों $y = x^2$ एवं $y^2 = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- 26 Solve the differential equation (अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए)

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy.$$

OR

Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2$; given $y=0$ when $x = \pi/2$

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।
दिया हुआ है कि $y=0$ यदि $x = \pi/2$

- 27 Find equation of the plane passing through the line of intersection of the planes $\vec{r}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ and $\vec{r}(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ and parallel to x-axis
समतलों $\vec{r}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ और $\vec{r}(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0$ के प्रतिच्छेदन रेखा से जानेवाले तथा x अक्ष के समांतर तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

- 28 A man is known to speak truth 3 out of 4 times. He throws a die and reports that it is a six. Find the probability that it is actually a Six.

एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आनेवाली संख्या 6 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आनेवाली संख्या वास्तव में 6 है।

- 29 Solve the following problem graphically and maximise. $Z = 8000x + 12000y$.
Subject to constraints : $3x + 4y \leq 60$

$$x + 3y \leq 30, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

आलेखीय विधि से निम्न समस्या को हल कीजिए : निम्न व्यवरोधो के अंतर्गत, $3x + 4y \leq 60$

$$x + 3y \leq 30, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$Z = 8000x + 12000y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

THE END